OPTIMÁLIS OSZTALÉKFIZETÉSI STRATÉGIÁK

KOCKÁZATI FOLYAMATOK ESETÉBEN

Mihálykóné Orbán Éva, Mihálykó Csaba, Lucz Lóránd

Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék
H8200 Veszprém, Egyetem u.10.

Bevezetés

A biztosítási matematikában általánosan vizsgált a Sparre Andersen kockázati folyamat [6], amely az alábbiakban foglalható össze. A biztosítótársaság részére az ügyfelek állandó *c* intenzitással fizetik be a biztosítási díjat. Ezért cserébe a biztosítótársaság kár előfordulásakor kifizetést biztosít számukra. A káresemények véletlen időpillanatban történnek, valamint a kár nagysága is véletlen. Az egymást követő káresemények közt eltelt időket t_k-val jelölve (*k*=1,2,3,…) valamint a $t_0 = 0$ jelöléssel élve, a t_k valószínűségi változók nemnegatív értékűek, a feltételezések szerint függetlenek, azonos eloszlásúak és véges várható értékűek. A *k.* kifizetés nagyságát az Y_k (*k*=1,2,3,…) valószínűségi változók adják meg, és ezek szintén nemnegatívak, függetlenek, azonos eloszlásúak, véges várható értékűek.

A kárfolyamatot leíró folyamat az az *N(t)* sztochasztikus folyamat, amelyre

$$N(t) = \begin{cases} 0 \quad ha \quad t_1 > t \\ i \quad ha \quad \sum_{k=1}^{i} t_k \le t \quad de \quad \sum_{k=1}^{i+1} t_k > t \end{cases}$$

Feltételezzük, hogy *N(t)* független $(Y_k)_{k=1,2,3,...}$-tól. Megjegyezzük, hogy a klasszikus rizikófolyamat esetén *N(t)* homogén Poisson folyamat. Megemlítjük, hogy az irodalomban főleg folytonos modellekkel foglalkoznak.

A modellnek számos módosítása ismert. Például a befizetés során figyelembe vehetők a véletlen ingadozások, adófizetési kötelezettségek, a függetlenség feltétele enyhíthető, bizonyos tartalék megléte esetén a befizetési intenzitás csökkenhet.
A modellekkel kapcsolatban sokféle kérdés fogalmazható meg. A leggyakoribb probléma a biztosítótársaság tönkremenési valószínűségének illetve a tönkremenési idő várható értékének a meghatározása. Ezen kérdések megválaszolására alkalmas eszköz folytonos eloszlású valószínűségi változók esetén az úgynevezett Gerber-Shiu diszkontált büntetőfüggvény, amely konstans egy büntetőfüggvény esetében a tönkremenési idő sűrűségfüggvényének a Laplace transzformáltja. Ezen függvény vizsgálatával foglalkozik többek között [3].
Másik szintén gyakran vizsgált kérdés a részvényeseknek a tönkremenésig kifizetett pénz várható értéke. A kifizetések bizonyos stratégia szerint történnek. A különböző stratégiák során kifizetett pénz várható értékére felírt integro-differenciálegyenletek hasonlóak a tönkremenési valószínűségekre felírható integro-diffrenciálegyenletekhez, az egyenletek

megoldási módszereiben is analógiák fedezhetők fel. Ahogy a tönkremenési valószínűség vizsgálatakor, úgy az osztalékfizetési stratégiák esetében is általános a folytonos modellek használata, noha a diszkrét eloszlásokkal esetenként pontosabban le lehet írni a valóságot. Cikkünkben a folytonos esetre vonatkozó eredmények bemutatása után az általunk bevezetett diszkrét modellekkel kapcsolatos eredményeinket ismertetjük, és hasonlítjuk össze a folytonos modellekre vonatkozó eredményekkel.

1. Osztalékfizetési stratégiák, a feladat megfogalmazása

Vizsgáljuk meg az alapmodellben a pénztárban levő pénzmennyiséget $x \geq 0$ kezdőtőke esetén. Ekkor a befizetett pénz és a káresemények folytán kifizetett pénz különbsége növeli, illetve csökkenti a kezdőtőkét, és a pénztárban levő pénz mennyisége

$$U(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad t \geq 0.$$

Ha nem megy tönkre a pénztár, akkor az $U(t) \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül minden $t \geq 0$ esetén. Ha tönkremegy a biztosító, akkor $U(t) < 0$ valamely $t \geq 0$ esetén. Ennek valószínűsége a tönkremenési valószínűség, azaz

$$\psi_1(x) = P(x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k < 0 \quad valamely \quad t \geq 0)$$

A tönkremenési idő *x* kezdőtőke mellett a következőképpen adható meg:

$$T_U(x) = \begin{cases} \inf \quad \{t \geq 0 : U(t) < 0\} & ha \quad létezik \quad t \geq 0 : U(t) < 0, \quad (U(0) = x) \\ \infty \quad ha \quad U(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Természetesen a gyakorlatban sokszor az $U(t) < z$ valamely $t \geq 0$ esetén probléma vizsgálata is érdekes, ez azonban könnyen visszavezethető az általunk vizsgált feladatra az *x-z* kezdőtőke alkalmazásával.

Módosítsuk alapmodellünket úgy, hogy valamilyen stratégia alapján a pénztárban levő pénzből osztalékot fizetünk a részvényeseknek. Ha a *t* ideig kifizetett osztalék értéke $D(t)$, akkor a pénztárban levő pénzmennyiség $R_D(t) = U(t) - D(t)$. Amennyiben a pénztárban levő pénz infláció folytán veszít értékéből, akkor a tönkremenésig a részvényeseknek kifizetett összeg diszkontált jelenértéke a következőképpen adható meg:

$$K_{\mathrm{D}}(x) = \int_0^{T_D(x)} e^{-\delta t} dD(t)$$

ahol δ jelöli az inflációs rátát és $T_D(x)$ a tönkremenés ideje *x* kezdőtőke esetén, azaz

$$T_D(x) = \begin{cases} \inf \quad \{t \geq 0 : R_D(t) < 0\} & ha \quad létezik \quad t \geq 0 : R_D(t) < 0, \quad (U(0) = x) \\ \infty \quad ha \quad R_D(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

A D stratégián a $\mathrm{D} = \{D(t)\}_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamatot értjük.

A részvényesek érdeke az, hogy a számukra kifizetett osztalék a lehető legnagyobb legyen. Mivel azonban $K_D(x)$ valószínűségi változó, ezért a várható értékét maximalizálják.
A stratégiák között azonban nem minden stratégia megengedett. Általánosan elfogadott követelmény a megengedett stratégiáktól, hogy a részvényeseknek történő kifizetések összértéke időben ne csökkenjen, valamint a részvényeseknek történő kifizetés következtében ne menjen tönkre a biztosítótársaság.
Pontosabban megfogalmazva: megengedett stratégiáknak nevezzük azokat a $\mathrm{D} = \{D(t)\}_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatokat, amelyekre teljesül az alábbi három tulajdonság:

a) $D(t-) = D(t)$

b) $D(t)$ növő függvény

c) $D(t+) - D(t) \leq R_D(t)$.

Ha P jelöli a megengedett stratégiák összességét, és a D stratégia szerinti osztalékfizetés diszkontált várható értéke x kezdőmennyiség mellett

$$V_D(x) = E(K_D(x)) = E(\int_0^{T_D(x)} e^{-\delta s} dD(s)),$$

akkor a

$$V(x) = \sup_{D \in \mathrm{P}} V_D(x)$$

meghatározása a feladat.

Albrecher és Thonhauser 2008-ban a klasszikus rizikófolyamat esetén becsléseket adtak az optimális osztalékfizetési stratégia mellett kifizetett osztalék és növekedése nagyságára [2]. Ezeket a becsléseket általánosítottuk.
Sparre Andersen modell esetén az alábbi becslések adhatók:

Állítás: Ha az egymást követő kárigények közt eltelt idők $F(t)$ eloszlásfüggvénye és $f(t)$ sűrűségfüggvénye folytonos függvény a pozitív számok halmazán, akkor általános folytonos $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel és $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel megadott kárigény-nagyságok esetén igazak a következő egyenlőtlenségek:

a) $$x + \frac{c}{\delta}\left(1 - \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt\right) \leq V(x) \leq \frac{\delta x + c}{\delta}$$

b) $$y - x \leq V(y) - V(x) \leq V(x) \cdot \left(\frac{e^{\frac{\delta(y-x)}{c}}}{1 - F(\frac{y-x}{c})} - 1 \right)$$

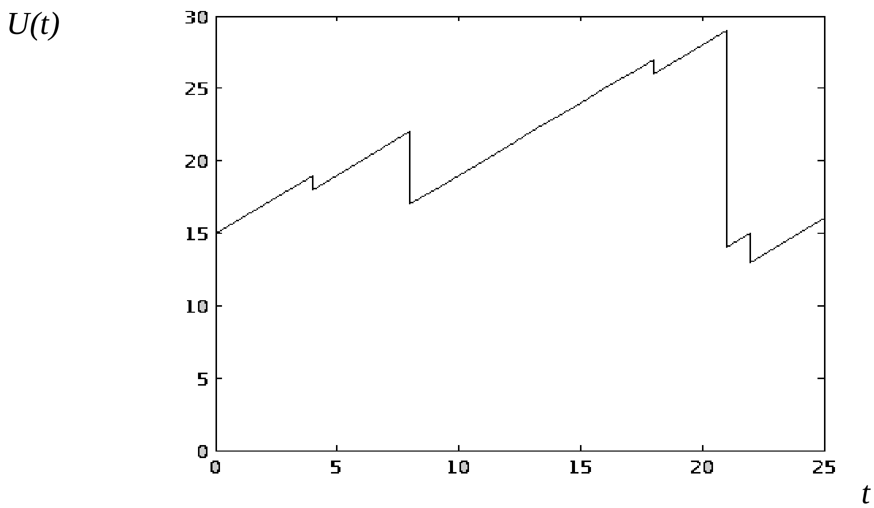
c) $$1 \leq V'(x) \leq V(x) \cdot \frac{\delta + f(0+)}{c(1 - F(0))}.$$

A bizonyítástól eltekintünk.

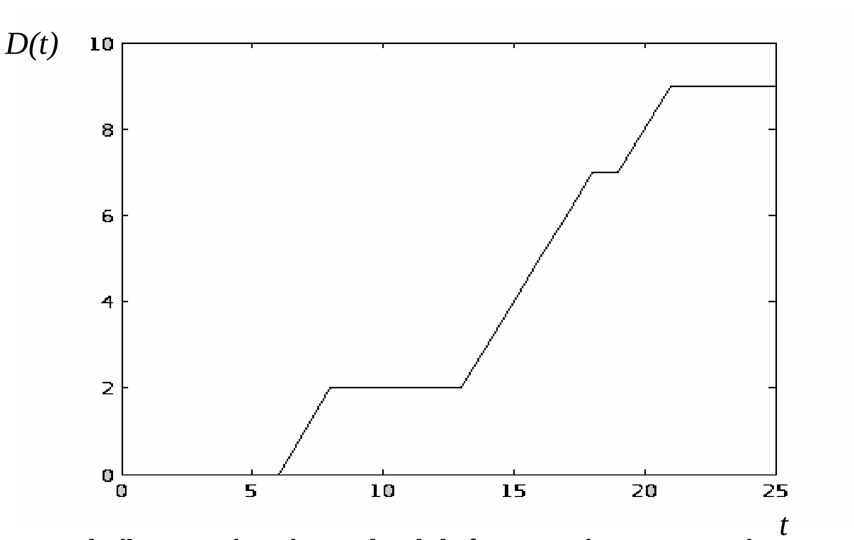
2. Speciális osztralékfizetési stratégiák: konstans barrier stratégiák és band típusú stratégiák

Az optimális stratégia megkeresése az összes megengedett stratégia között nem megoldott feladat, de ha leszűkítjük a megengedett stratégiák halmazát speciális típusú stratégiákra, vagy bizonyos feltételeket adunk meg a folyamatra vonatkozóan, akkor az optimális stratégia már meghatározható a leszűkített halmazban.
Az egyik gyakran használt leszűkítés a konstans barrier stratégia. Ez a következőképpen adható meg: legyen $b \geq 0$ rögzített. Ha $R_D(t) \geq b$, akkor a teljes befizetést osztalékként kifizetik a részvényeseknek, ha viszont $R_D(t) < b$, akkor nincs osztalékfizetés.

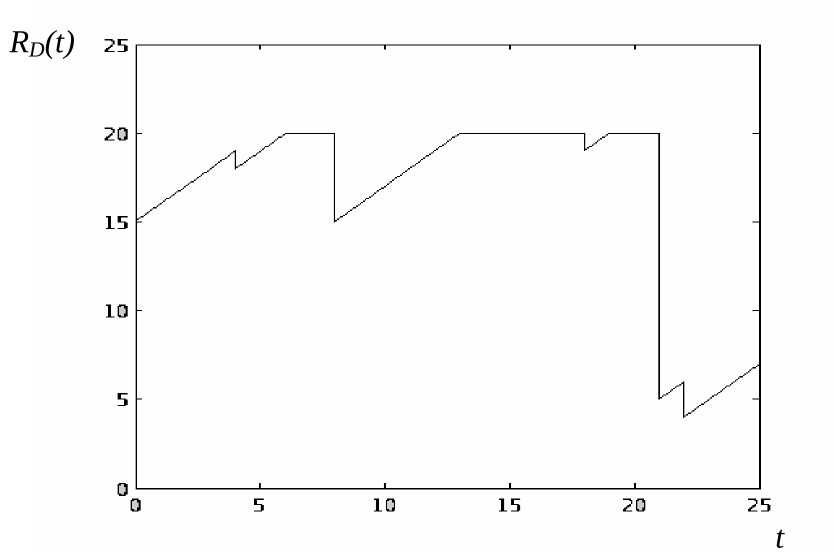
Az alábbi 1.a, 1.b, 1.c ábrákon a pénztárban levő pénzmennyiség alakulását a részvényeseknek történő kifizetések nélkül, a részvényeseknek kifizetett pénz mennyiségét, valamint a pénztárban ténylegesen levő pénz mennyiségét követhetjük nyomon az idő függvényében x=15 kezdőtőke és b=20 barrier szint mellett konstans barrier stratégia esetén.



1.a ábra A pénztárban a pénzmennyiség alakulása
a részvényeseknek történő kifizetések nélkül



1.b ábra A részvényeseknek kifizetett pénz mennyisége



1.c ábra A pénztárban levő pénz mennyisége

Gerber és Shiu [3] bebizonyították, hogy klasszikus rizikófolyamat esetén $V_D(x) = V_D(x,b)$ jelöléssel $V_D(x,b)$ kielégíti az alábbi integro-differenciálegyenletet:

$$cV_D'(x,b) - (\lambda+\delta)V_D(x,b) + \lambda\int_0^x V_D(x-y,b)g(y)dy = 0\,, \quad \text{ha } x < b \qquad \text{és} \quad \frac{\partial V_D}{\partial x}(b,b) = 1\,.$$

Ennek az egyenletnek megadható a pontos megoldása β paraméterű exponenciális eloszlású kárigény esetén, nevezetesen:

$$V_D(x,b) = \frac{(\beta+\rho)e^{\rho x} - (\beta - R)e^{-Rx}}{\rho(\beta+\rho)e^{\rho b} + R(\beta - R)e^{-Rb}}\,,$$

ahol ρ és -R a

$$\delta + \lambda - cx = \int_0^\infty e^{-yx} g(y)dy$$

úgynevezett Lundberg egyenlet két gyöke és az optimális b érték:

$$b^* = \frac{1}{\rho + R}\ln\left(\frac{R^2(\beta - R)}{\rho^2(\beta+\rho)}\right).$$

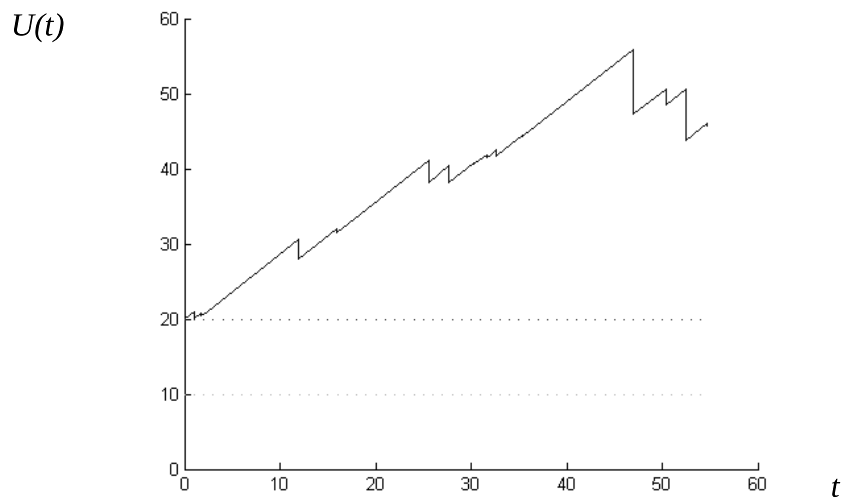
A konstans barrier stratégia előnye, hogy egyszerű és analitikusan jól kezelhető, egyik hátránya viszont, hogy általánosan nem optimális stratégia a megengedett stratégiák halmazán, csak bizonyos esetekben, például Poisson folyamat esetében, ha a kárigény exponenciális eloszlású. Emiatt általában csak alsó korlátként használható – igaz, annak viszont gyakran egészen pontos. Másik hátránya, hogy alkalmazásakor 1 valószínűséggel tönkremegy a pénztár. Ezért az utóbbi időben számos más, bonyolultabb, de a fenti hátrányokat (részben vagy teljesen) kiküszöbölő egyéb stratégiákat alkalmaznak [1, 2, 4, 5].

Az alábbiakban megadjuk a klasszikus rizikófolyamat esetén optimális stratégiát. Ehhez definiáljuk az úgynevezett band típusú stratégiákat.

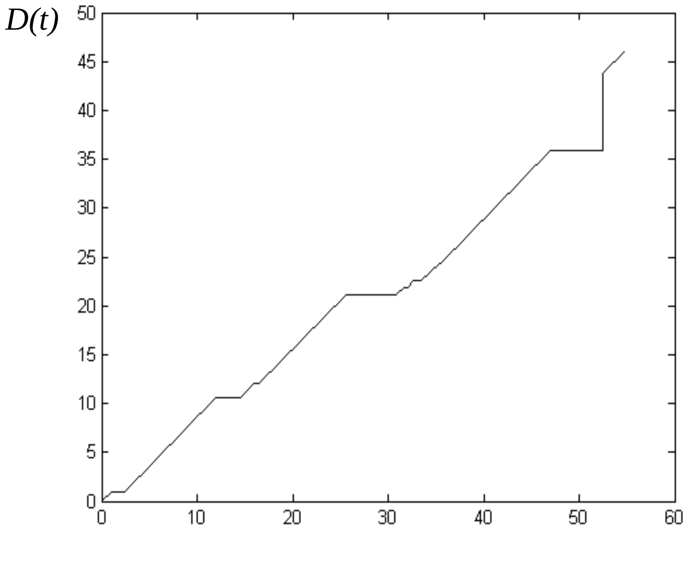
Legyenek *A, B, C* diszjunkt halmazok, amelyekre $R_0^+ = A \cup B \cup C$. Legyen a stratégiánk a következő:

- Ha $R_D(t) \in A$, akkor a befizetés egy része $c - \alpha$ intenzitással a pénztárba folyik be, másik része α intenzitással a részvényeseknek kerül kifizetésre ($0 \le \alpha \le c$).
- Ha $R_D(t) \in B$, akkor a $\max(0, R_D(t) - x_1)$ összeget kifizetik osztalékként, ahol $x_1 = \begin{cases} \sup\{x \in A \mid x < R_D(t)\}, & \text{ha ez véges} \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$
- Ha $R_D(t) \in C$, akkor nincs osztalékfizetés.

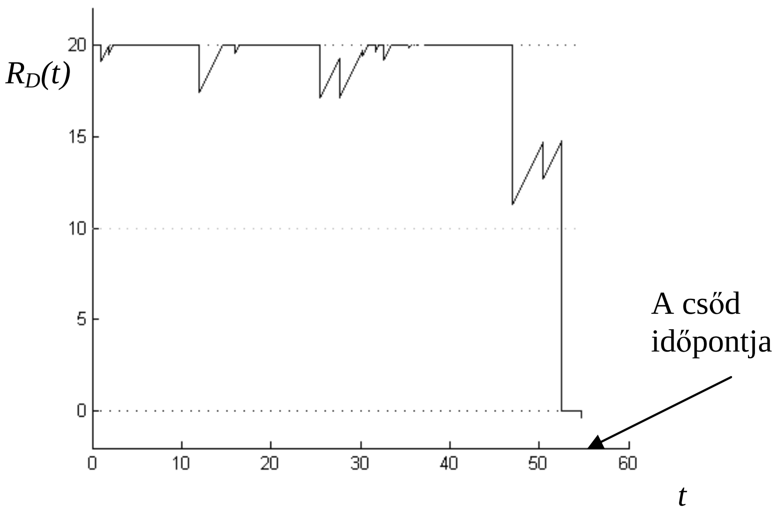
Az alábbi 2.a, 2.b, 2.c ábrákon a pénztárban levő pénzmennyiség alakulását a részvényeseknek történő kifizetések nélkül, a részvényeseknek kifizetett pénz mennyiségét valamint a pénztárban ténylegesen levő pénz mennyiségét követhetjük nyomon az idő függvényében band típusú stratégia esetén *x*=20 kezdőtőke mellett. Az *A*, *B* , *C* halmazokat az alábbi módon választottuk: $A = \{0\} \cup [20, \infty)$, *B*=(0,10), *C*=[10,20).



2.a ábra A pénztárban a pénzmennyiség alakulása
a részvényeseknek történő kifizetések nélkül



2.b ábra A részvényeseknek kifizetett pénz mennyisége



2.c ábra A pénztárban levő pénz mennyisége

A klasszikus rizikófolyamat esetén optimális a band típusú stratégia az összes megengedett stratégia között, amennyiben az *A, B, C* halmazok az alábbi módon vannak definiálva [2]:

$$A = \left\{ x \in [0,\infty) \,|\, L(x) = c - (\delta + \lambda)V(x) + \lambda \int_0^\infty V(x-y)g(y)dy = 0 \right\},$$
$$B = \left\{ x \in [0,\infty) \,|\, V'(x) = 1 \quad \text{és } L(x) < 0 \right\}$$
$$C = R_0^+ \setminus (A \cup B)$$
és $\alpha = \mathrm{c}$.

3. A folytonos modell diszkrét analógiája

Az irodalomban tanulmányozott modellek általában folytonos modellek, de több szempontból is érdemes diszkrét modelleket is vizsgálni. Egyrészt mert a valóság is diszkrét, hiszen a biztosítók csak egész értékű kárigényeket elégítenek ki, másrészt mert diszkét modellek esetén az integro-differenciálegyenletből differenciaegyenletek lesznek, amelyeket általában könnyebb megoldani, mint az integro-differenciálegyenleteket. A diszkrét modellekben azonban nagyobb hangsúlyt kell fektetni annak tisztázására, hogy mely esetekben engedjük meg az egyenlőséget, és mely esetekben nem.
Tételezzük fel, hogy c=1, amellyel az általánosságot nem korlátozzuk. Tegyük fel, hogy az egymást követő kárigények közt eltelt idők nemnegatív egész értéket felvevő valószínűségi változók, és legyen

$$P(t_k = j) = f(j) \geq 0, \qquad j = 0,1,2,...$$

ahol

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = 1, \; \mu_f = \sum_{j=0}^{\infty} j f(j) < \infty .$$

A kárigényeket megadó valószínűségi változók szintén nemnegatív egész értéket vegyenek fel, és

$$P(Y_k = i) = g(i) \geq 0 , \; i = 0,1,2,... , \; \sum_{i=0}^{\infty} g(i) = 1 , \; \mu_g = \sum_{i=0}^{\infty} i g(i) < \infty .$$

A Sparre Andersen kockázati modell esetén n kezdőtőke mellett

$$U(m) = m - \sum_{k=1}^{N(m)} Y_k + n$$

adja meg a pénztárban levő pénz mennyiségét, és jelölje $u(n)$ a csőd valószínűségét n kezdőtőke mellett, azaz

$$u(n) = P(m - \sum_{k=1}^{N(m)} Y_k + n < 0 \quad \text{valamely} \quad m = 0,1,... \text{esetén}) .$$

A tönkremenés időpontja akkor m (n kezdőtőke mellett), ha

$$m - \sum_{k=1}^{N(m)} Y_k + n < 0 \quad \text{és} \quad s - \sum_{k=1}^{N(s)} Y_k + n \geq 0 \quad 0 \leq s < m .$$

Amennyiben osztalékot is fizetnek a folyamat során, és $d(m)$ az m ideig kifizetett osztalék, akkor a pénztárban levő pénz mennyisége

$$R_d(m) = U(m) - d(m)$$

lesz. A kifizetett osztalék diszkontált értéke:

$$K_d(z) = \sum_{j=1}^{T_d(n)} (d(j) - d(j-1)) z^{-j} ,$$

ahol $T_d(n)$ a tönkremenés ideje a $\mathrm{d} = \{d(m)\}_{m\geq 0}$ stratégia alkalmazásakor *n* kezdőtőke mellett és $z \in (1,\infty)$.
A d stratégia akkor megengedett, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

a) $0 \leq d(m-1) \leq d(m)$

b) $d(m) - d(m-1) \leq R_d(m)$.

A d stratégia szerinti osztalékfizetés diszkontált várható értéke *n* kezdőmennyiség mellett

$$V_d(n) = E(\sum_{j=1}^{T_d(n)} (d(j) - d(j-1))z^{-j}).$$

Ha π jelöli a megengedett stratégiák összességét, akkor a cél a

$$V(n) = \sup_{d\in\pi} V_d(n)$$

meghatározása.

Állítás: Tetszőleges diszkrét eloszlású betöltési időközök és kárigények esetén az optimális stratégia szerint kifizetett osztalék diszkontált várható értékére teljesül, hogy

$$n + \frac{1}{z-1}(1 - \sum_{j=0}^{\infty} f(j)z^{-j}) \leq V(n) \leq n + \frac{1}{z-1}, \ z > 1$$

$0 \leq l < n$ esetén

$$n - l \leq V(n) - V(l) \leq V(l)(\frac{z^{n-l}}{\sum_{j=n-l}^{\infty} f(j)} - 1)$$

Speciálisan ha $l = 0$, akkor

$$n + V(0) \leq V(n) \leq V(0)\frac{z^n}{\sum_{j=n}^{\infty} f(j)},$$

és ha $l = n-1$, akkor

$$1 \leq V(n) - V(n-1) \leq V(n-1) \cdot \frac{z - 1 + f(0)}{1 - f(0)}.$$

Megfigyelhető, hogy ezek az egyenlőtlenségek a 3. oldalon található állítás diszkrét változatai. A bizonyítástól ismét eltekintünk.

4. Speciális stratégia: konstans barrier stratégia

Legyen ismételten az a stratégia, hogy ha a pénztárban levő pénzmennyiség meghaladja a *b* szintet, $b \in N$, akkor a pénztárba beérkező pénzt a részvényeseknek kifizetjük. Ekkor $V_d(n,b) = V_d(n)$ jelöléssel a következőt állíthatjuk:

Állítás: $V_d(n,b)$ kielégíti az alábbi differenciaegyenletet ($0 \le n \le b$):

$$V_d(n,b) = \sum_{j=0}^{b-n}\sum_{i=0}^{n+j} V_d(n+j-i,b) z^{-j} f(j) g(i) +$$
$$+ \sum_{j=b-n+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{b} V_d(b-i,b) z^{-j} f(j) g(i) + \sum_{j=b-n+1}^{\infty}\left(\sum_{l=b-n+1}^{j} z^{-l}\right) f(j)$$

Ha $f(j) = (1-f)f^j$, akkor az előző egyenlet az alábbi alakba transzformálható ($1 \le n \le b$):

$$V_d(n,b) = \frac{z}{f} V_d(n-1,b) - \sum_{i=0}^{n-1} V_d(n-1-i,b) g(i) \frac{1-f}{f} z\,,$$

a következő peremfeltétellel:

$$V_d(b+1,b) - V_d(b,b) = 1.$$

Ha $f(j) = (1-f)f^j$ és $g(i) = (1-g)g^i$, akkor az egyenlet megoldása

$$V_d(n,b) = \alpha_1(b)(\mu_1)^n + \alpha_2(b)(\mu_2)^n$$

alakú, ahol

$$\mu_{1,2} = \frac{z(1+\frac{1-f}{f}g) + g \mp \sqrt{(z(1+\frac{1-f}{f}g)+g)^2 - \frac{4gz}{f}}}{2}$$

és $\alpha_1(b)$, $\alpha_2(b)$ alkalmas konstansok.

A részvényeseknek kifizetendő pénzt megadó függvény a maximumát a valós számok halmazán a következő helyen veszi fel:

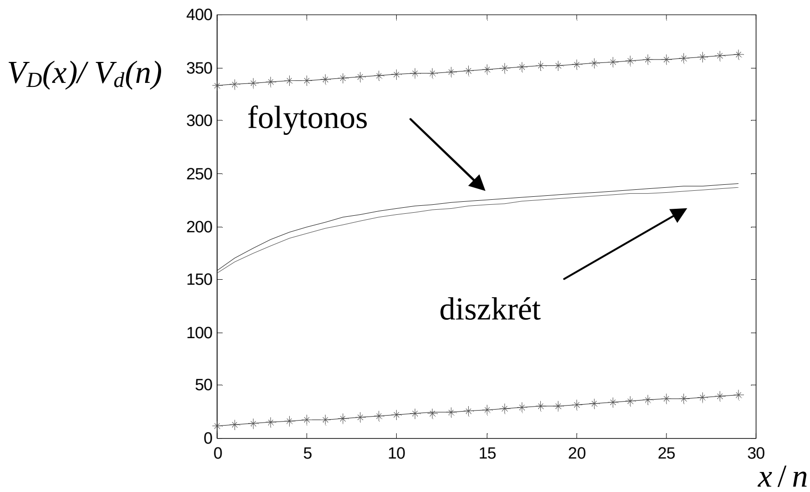
$$b^* = \frac{\ln\left(\frac{\mu_1 f - z + (1-f)(1-g)}{\mu_2 f - z + (1-f)(1-g)} \cdot \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 z - 1} \cdot \frac{\ln \mu_2}{\ln \mu_1}\right)}{\ln \frac{\mu_1}{\mu_2}},$$

Természetesen ez a b^* érték nem feltétlenül egész; amennyiben az egész számok körében keressük az optimum helyet, akkor az optimum helye b^* egész része vagy annál eggyel nagyobb. Amennyiben a képlet által megadott b^* negatív, akkor a keresett barrier érték értelemszerűen 0.

A bizonyítástól ezúttal is eltekintünk. Ismételten megfigyelhető a folytonos esettel való analógia.

5. A folytonos és a diszkrét modell összehasonlítása

Végezetül egy példán keresztül összehasonlítjuk a diszkrét és a folytonos modellből kapott eredményeinket.
A legtöbb (és analitikusan pontos) eredmény Poisson folyamat és exponenciális eloszlású kárigény esetén van, ezért az összehasonlításhoz a folytonos modellben ezt az esetet választottuk.
A kárigények közt eltelt időközök exponenciális eloszlású valószínűségi változók λ=0.09 paraméterrel, a kárigények nagyságát is exponenciális eloszlású valószínűségi változók adják meg β=0.3 paraméterrel. A c értékét egynek választottuk, míg δ=0.03.



3. ábra A tönkremenésig kifizetett (optimális) osztalék várható értéke a kezdőtőke függvényében a folytonos és a diszkrét modell esetében

Mivel az exponenciális eloszlás diszkrét megfelelője a geometriai eloszlás, ezért a diszkrét modellben a megfelelő eloszlások geometriai eloszlások. A paramétereket úgy választottuk, hogy az egymásnak megfeleltetett eloszlások várható értéke megegyezzen. A diszkrét analógiában a megfelelő geometriai eloszlás paraméterei $f = \frac{5}{9}$ és $g = \frac{10}{13}$. A δ=0.03 választásnak z=1.03 felel meg a diszkrét esetben.
A 3. ábrán a tönkremenésig kifizetett pénz várható értéke látható konstans barrier stratégia esetén. Az alsó és a felső határokat is berajzoltuk az ábrára. Mint látható, a diszkrét és a folytonos modellből kapott eredmények nagyon közel esnek egymáshoz, ami azt mutatja, hogy a diszkrét modell jól approximálja a folytonos modellt.

Irodalomjegyzék

[1] Albrecher, H., Hartinger, J., Thonhauser, S.: On exact solutions for dividend strategies of threshold and linear barrier type in a Sparre Andersen model. ASTIN Bulletin 37 (2007) pp.203-233.

[2] Albrecher, H., Thonhauser, S: Optimal dividend strategies for a risk process under force of interest. Insurence: Mathematics and Economics 43 (2008) pp.134-149.

[3] Gerber, H. U. , Shiu, S.W.: On the time value of ruin. Actuarial Research Clearing House (1997), Vol.1. pp.145-199.

[4] Gerber, H. U., Shiu, S.W: On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, North Am. Actuarial J. Vol. 10. (2006) pp. 1-30.

[5] Rosca, A., Rosca, N.: Theoretical analysis and simulation of a risk process with a logarithmic dividend barrier. PU.M.A. Vol. 18 (2007) pp.137-159.

[6] Sparre Andersen: On the Collective Theory of Risk in the Case of Contagious between the Claims.In: Transactions of the XV Intern. Congress, 1957.