Egzakt játékok átruházható hasznosságú kooperatív játékokban

Csóka Péter (BCE)

Szerzőtársak:
P. Jean-Jacques Herings (Maastricht)
Kóczy Á. László (Maastricht és BMF)

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Motiváció

- Teljesen kiegyensúlyozott játékok
  - Piacjátékok (Shapley és Shubik, 1969)
  - Lineáris termelési játékok (Owen,1975)
  - Általánosított hálózati problémák (Kalai és Zemel, 1982)
- Konvex játékok
  - Reptéri játékok (Littlechild és Owen, 1973)
  - Csődjátékok (Aumann és Maschler, 1985)
  - Sequencing games (Curiel, Pederzoli és Tijs, 1989)
  - Standard tree games (Granot, Maschler, Owen és Zhu, 1996)
- Egzakt játékok
  - Multi issue allocation games (Calleja, Borm és Hendrickx, 2005)
  - Kockázatelosztási játékok (Csóka, Herings és Kóczy, 2008)

Kooperatív játékok átruházható hasznossággal

- Játékosok: $N = \{1, \ldots, n\}$
- Koalíciós függvény: $v : 2^N \to \mathbb{R}$, ahol $v(\emptyset) = 0$
- Elosztás: $x \in \mathbb{R}^N$, $x(C) = \sum_{i \in C} x_i$
  - hatékony: $x(N) = v(N)$
  - koalíciósan racionális: $x(C) \geq v(C)$ minden $C \in \mathcal{N}$-re

mag

Egy kooperatív játék

C	v(C)	
{1}	0	2
{2}	0	1
{3}	0	5
{1,2}	3	
{1,3}	6	
{2,3}	1	
{1,2,3}	8	

Kiegyensúlyozottság

- Tagsági vektor: $a(C) \in \mathbb{R}^n$ minden $C \in \mathcal{N}$ koalícióra, ahol
  - $a_i(C) = 1$, ha $i \in C$
  - $a_i(C) = 0$ egyébként
- Kiegyensúlyozott súlyvektor: $\lambda_C \in \mathbb{R}_+$ és $\sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C a(C) = a(N)$
- Kiegyensúlyozott játék: $\sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C v(C) \leq v(N)$
  minden kiegyensúlyozott súlyvektorra

Egy teljesen kiegyensúlyozott játék

C	v(C)	
{1}	0	1
{2}	0	
{3}	0	
{1,2}	3	0.5
{1,3}	6	0.5
{2,3}	1	0.5 1
{1,2,3}	8	

$$0.5(3+6+1)=5<8$$

Egzaktság

C	v(C)	
{1}	0	0
{2}	0	2
{3}	0	5
{1,2}	3	
{1,3}	6	
{2,3}	1	
{1,2,3}	8	

Minden C koalícióra létezik olyan *x* magbeli elosztás, hogy $x(C)=v(C)$

{1,2}

Az egzakt játékok teljesen kiegyensúlyozottak.

Egzakt kiegyensúlyozottság

$$
(\mathrm{P}_{v,D}) \quad \begin{array}{l} \min a(N)x \\ \quad \text{s. t.} \\ a(C)x \geq v(C),\ \ C \in \mathcal{N} \setminus \{D\} \\ a(D)x = v(D) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \qquad (\mathrm{P}^*_{v,D}) \quad \begin{array}{l} \max \sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C v(C) \\ \quad \text{s. t.} \\ \sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C a(C) = a(N) \\ \lambda_C \in \mathbb{R}_+,\ \ C \in \mathcal{N} \setminus \{D\} \\ \lambda_D \in \mathbb{R} \end{array}
$$

Egy $(N, v) \in \Gamma$ játék pontosan akkor egzakt, ha egzakt kiegyensúlyozott.

- Egzakt kiegyensúlyozott súlyvektor: $D \in \mathcal{N}$, $\lambda_D \in \mathbb{R}$, $C \in \mathcal{N} \setminus \{D\}, \lambda_C \in \mathbb{R}_+$, és $\sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C a(C) = a(N)$
- Egzakt kiegyensúlyozott játék: $\sum_{C \in \mathcal{N}} \lambda_C v(C) \leq v(N)$ minden egzakt kiegyensúlyozott súlyvektorra

Egzakt kiegyensúlyozottság

C	v(C)	
{1}	0	-1
{2}	0	
{3}	0	
{1,2}	3	1
{1,3}	6	1
{2,3}	1	
{1,2,3}	8	

A súlyok egyike negatív lehet.

-a({1})+ a({1,2})+ a({1,3})=a(N)

-v({1})+ v({1,2})+ v({1,3}) ? v(N)

(-1)0+3+6>8, a játék nem egzakt

a({1,2})+ a({1,3})=a(N)+ a({1})

v({1,2})+ v({1,3})>v(N)+ v({1})

A súlyok interpretálása

A súlyok egyike negatív lehet.

$$-a(\{1\})+ a(\{1,2\})+ a(\{1,3\})=a(N)$$

$$-v(\{1\})+ v(\{1,2\})+ v(\{1,3\}) \ ?\ v(N)$$

$$a(\{1,2\})+ a(\{1,3\})=a(N)+ a(\{1\})$$

$$v(\{1,2\})+ v(\{1,3\})<v(N)+ v(\{1\})$$

Az egzakt játékok teljesen kiegyensúlyozottak+…

Egy $(N, v) \in \Gamma$ játék pontosan akkor egzakt, ha teljesen kiegyensúlyozott és *túlegyensúlyozott (overbalanced).*

- Túlegyensúlyozott súlyvektor: olyan $(\mu_C)_{C \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}}$ vektor, amire $\mu_C \in \mathbb{R}_+$ és $\sum_{C \in \mathcal{N} \setminus \{D, N\}} \mu_C a(C) = a(N) + \mu_D a(D)$ valamilyen $D \in \mathcal{N}$ koalícióra
- Túlegyensúlyozott játék: $\sum_{C \in \mathcal{N} \setminus \{D, N\}} \mu_C v(C) \leq v(N) + \mu_D v(D)$ minden túlegyensúlyozott súlyvektorra

Konvex játékok

Definíció. Egy (N, v) játék *konvex*, ha kielégíti az alábbi három feltétel valamelyikét:

$$\forall S, T \in 2^N\colon\ v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \tag{1}$$

$$\forall U \in 2^N; \forall S \subsetneq T \subseteq N \setminus U\colon\ v(S \cup U) - v(S) \leq v(T \cup U) - v(T), \tag{2}$$

$$\forall i \in N; \forall S \subsetneq T \subseteq N \setminus \{i\}\colon\ v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T). \tag{3}$$

Tétel (Shapley, 1971; Ichiishi, 1981). Egy (N, v) játék pontosan akkor konvex, ha minden permutációra a határhozzájárulás-vektor magbeli.

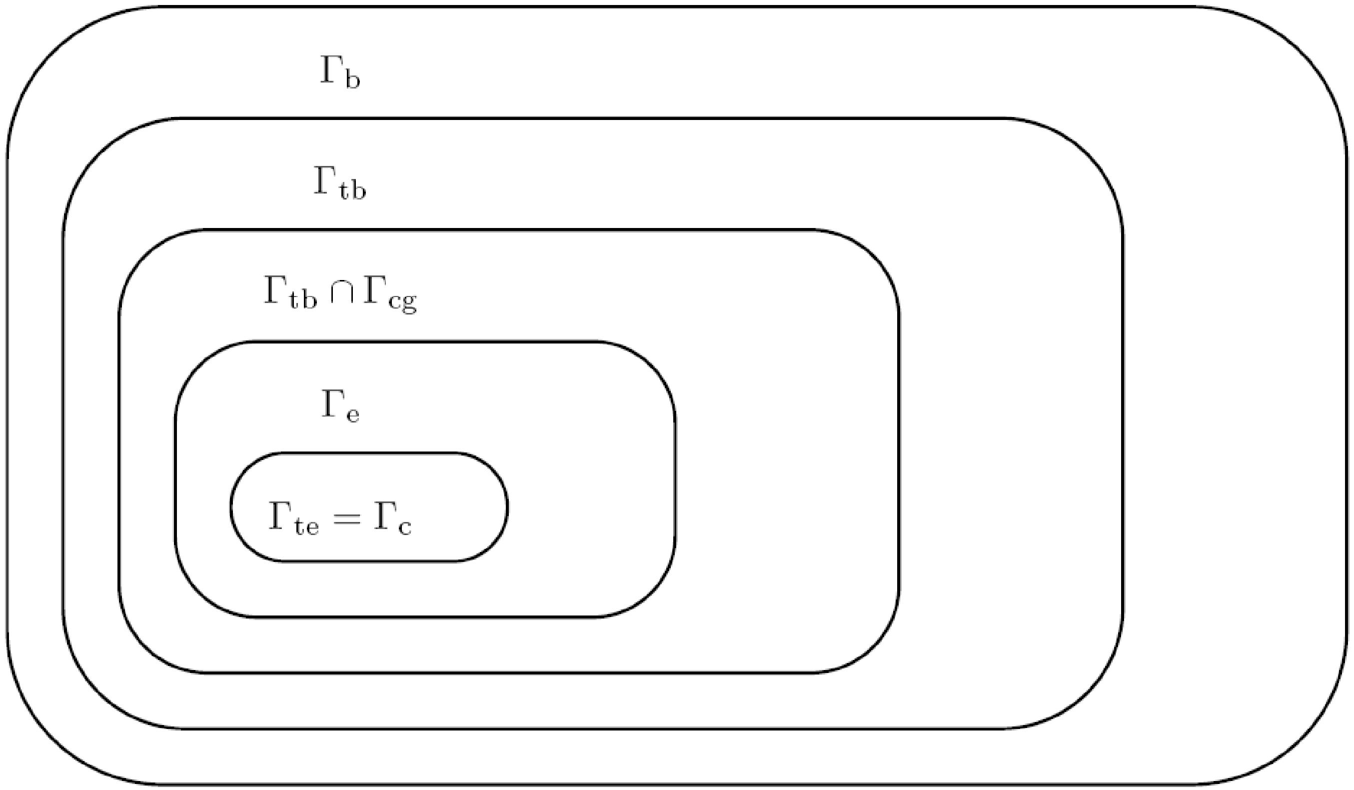
$(v(\{1\}),\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}),\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}))$

Egy konvex játék

C	v(C)
{1}	0
{2}	0
{3}	0
{1,2}	**2**
{1,3}	6
{2,3}	1
{1,2,3}	8

koalíciók	X^1	X^2	X^3	$\sum$
{1}, {1,2}	0	2	6	8
{2}, {2,3}	7	0	1	8
{3}, {1,3}	6	2	0	8

A kiegyensúlyozott játékok részhalmazai



Köszönöm a figyelmet, várom a kérdéseket!