SZENT ISTVÁN EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR, Gödöllő

Általánosított Fuhrmann-rangfeltétel dinamikus diszkrét lineáris rendszerek irányíthatóságára és elérhetőségére

Molnár Sándor- Szigeti Ferenc

XVIII. Magyar Operációkutatási Konferencia

2009. június 8 – 10., Balatonőszöd

Bevezetés

Megmutatjuk, hogy a diszkrét dinamikus lineáris rendszerek elérhetősége és megfigyelhetősége ekvivalens egy strukturált Kálmán-féle rangfeltétellel a struktúramátrixok időtől függő együtthatóinak differenciálalgebrai függetlenségének feltevése mellett.

Abban az esetben, ha a rendszer nem elérhető, csak azt tudjuk állítani, hogy az elérhetőségi altér dimenziójának maximumát végetelen sokszor eléri. Vizsgáljuk egy bilineáris rendszer megfigyelhetőségét is.

Az időtől függő folytonos idejű, lineáris rendszerek elérhetőségét (irányíthatóságát) általánosított Kálmán-féle rangfeltételekkel jellemeztük, ld. [2], [3], a struktúramátrixok időtől függő együtthatóinak differenciálalgebrai függetlensége mellett Legyen $A_1,\dots,A_I$ az *L(A)* Lie algebra bázisa, amelyet az $A(t)\in\Re^{n\times n}$ struktúramátrix generál a

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{1}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \tag{2}$$

rendszerben, ahol

$$B(t)\in\Re^{n\times p},\quad C(t)\in\Re^{q\times n},\quad D(t)\in\Re^{q\times p}$$

Feltesszük ezen mátrixértékű függvények folytonosságát. Legyenek a *V(B)*, *V(C)* vektorterek adottak, amelyeket rendre **B(t), C(t),** mátrixok generálnak.

Jelöljük $B_1,...,B_J$, $C_1,...,C_K$ -vel a vektorterek bázisát .

Akkor a struktúramátrixokat a megfelelő bázisokban kifejtve/kifejezve:

$$A(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) A_i , \quad B(t) = \sum_{j=1}^{J} b_j(t) B_j , \quad C(t) = \sum_{k=1}^{K} c_k(t) C_k . \qquad (3)$$

Az (1) és (2) rendszerek elérhetőségének általánosított Kálmán-féle rangfeltétele

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{0 \le n_1 < n} \cdots \sum_{0 \le n_I < n} \operatorname{Im}(A_1^{n_1} \ldots A_l^{n_l} B_j) = \Re^{n \times n}, \qquad (4)$$

A megfigyelhetőségé pedig:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{0 \le n_1 < n} \cdots \sum_{0 \le n_I < n} \operatorname{Im}\left(A_1^{*n_1} \ldots A_l^{*n_I} C_k^{*} \right) = \Re^{n \times n} \qquad (5)$$

Ekkor bebizonyítottuk, hogy az időtől függő együtthatók

$$a_1(t),...,a_I(t),\ b_1(t)...b_J(t)$$

differenciálalgebrai függetlensége esetén az általánosított Kálmán-féle rangfeltétel (4) ekvivalens az (1) és (2) rendszerek irányíthatóságával (elérhetőségével)

Hasonlóan ha az

$$a_1(t),...,a_I(t),\ \ c_1(t),...,c_K(t)$$

együtthatók differenciáalgebrailag függetlenek, akkor az általánosított Kálmán-féle rangfeltétel (5) ekvivalens az (1) – (2) rendszerek megfigyelhetőségével (visszaállíthatóságával /rekonstruálhatóságával) ld. [2], [3].

Ugyanakkor ezek a diszkrétidejű esetben nem állnak fent. Valóban, legyen n>1, és legyenek

$$B_1,\dots,B_n \in \Re^{n\times 1} = \Re^n ,$$

független vektorok. Tegyük fel, hogy a

$$b_1(t),\dots,b_n(t), \quad t = 0,1,\dots$$

együtthatók diff.alg. függetlenek. Akkor a

$$x(t+1) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t) B_j \tag{6}$$

diszkrétidejű rendszer kielégíti a folytonos rendszerrel analóg feltételeket.

Ugyanakkor a (6) rendszer elérhetőségi altereinek dimenziója nem nagyobb mint 1. Alapvető eltérés ebből a szempontból, hogy a folytonosidejű rendszereknek mindig van „emlékezete”, ugyanakkor diszkrét esetben ez a probléma nagyon bonyolulttá válhat. Például a (6) rendszernek nincs „memóriája”.

Probléma megfogalmazása

Vegyük az (1)-(2)-vel analóg, időtől függő diszkrét rendszereket,

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \qquad (*)$$

Legyen

$$\underline{i} = (i_1, \dots, i_T) \in Z_I^T, A_{\underline{i}} = A_{i_1} \dots A_{i_T}.$$

Definiáljuk az elérhetőség strukturális rangját:

$$\mathrm{MaxDim} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{Im}\left(\sum_{\underline{i} \in Z_l^{T-t}} \alpha_{\underline{i}} A_{\underline{i}} \right) \left(\sum_{j=1}^{J} \alpha_{\underline{i}} A_{\underline{i}} \right), \qquad (7)$$

rendre az $\alpha_{\underline{i}}, \beta_{\underline{i}}$ paraméterekhez . Egyszerűen belátható, ha a strukturális rang r, akkor az altér dimenziója

$$\sum_{t=1}^{T} \mathrm{Im}\left(\sum_{\underline{i} \in Z_{I}^{T-t}} \alpha_{\underline{i}} A_{\underline{i}} \right)\left(\sum_{j=1}^{J} \beta_j B_j \right) \subseteq \Re^n \qquad (8)$$

is r , m.m. az $\alpha_{\underline{i}}, \beta_{\underline{i}}$ paraméterek terében. Az irányíthatóság strukturális rangját hasonlóan definiálhatjuk

$$\mathrm{MaxDim} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{Im}\left(\sum_{\underline{i} \in Z_{I}^{T-t}} \alpha_{\underline{i}} A_{\underline{i}}^{*} \right)\left(\sum_{k=1}^{K} \gamma_k C_k^{*} \right). \qquad (9)$$

Fő eredményünk, hogy a diszkrétidejű rendszerekre hasonló tételek mondhatóak ki.

Fő eredmények

1. Tétel. Tételezzük fel az $a_1(t),...,a_I(t),\ b_1(t)...b_J(t)$ időtől függő együtthatók differenciálalgebrai függetlenségét. Akkor a (*) rendszer a $[\tau,\tau+T]=\{\tau,\tau+1,...,\tau+T\}$ időintervallumon a τ végtelen sok értékére elérhető akkor, és csak akkor ha (7) elérhetőségének strukturális rangja *n*. Hasonlóan, ha az $a_1(t),...,a_I(t),\ c_1(t),...,c_K(t)$ az időtől függő együtthatók diff.alg. függetlenek, akkor a (*) rendszere megfigyelhető a $[\tau,\tau+T]$ intervallumon a τ végtelen sok értékére akkor, és csak akkor ha a (9) elérhetőségének strukturális rangja *n*.

A strukturális tulajdonságokról bővebben ld. [1].

A (*) rendszer alapmátrixa

$$\Phi(t+T,t) = A(T+t-1)A(T+t-2)\ldots A(t) =$$

$$= \sum_{\underline{i}\in Z_k^T} \delta^{T-1} a_{i_1}(t) \ldots \delta a_{i_{T-1}}(t) a_{i_T}(t) A_{i_1} \ldots A_{i_T}$$

ahol

$$(\delta_a)(t) = a(t+1)$$

a szekvenciális eltolás-operátor , és

$$m_{\underline{i}}(a) = (\delta^{T-1} a_{i_1})(\delta^{T-2} a_{i_2})\ldots(\delta a_{i_{T-1}}) a_{i_T}$$

egy differencia-monomiál.

Ebből a következő kifejezést kapjuk:

$$\Phi(t+T,t)=\sum_{\underline{i}\in Z_k^T} m_{\underline{i}}(a)(t)\,A_{\underline{i}},$$

Ekkor, a (*) differenciaegyenlet megoldása az x(τ)=0 kezdeti feltétel mellett, az alábbi szekvencia $T=\tau,\tau+1,\ldots$

$$x(T)=\sum_{t=1}^{T}\Phi(\tau+T,\tau+t)\,B(\tau+t-1)\,u(\tau+t-1)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}\sum_{\underline{i}\in Z_l^{T-t}}\delta^{t-1}b_j(\tau)\,\delta^{1}m_{\underline{i}}(u)(\tau)\,A_{\underline{i}}B_j u(\tau+t-1)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{\underline{i}\in Z_l^{T-t}}\delta^{t}m_{\underline{i}}(a)(\tau)\,A_{\underline{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{J}\delta^{t-1}b_j(\tau)\,B_j\right)u(\tau+t-1)$$

Az utolsó képletből következik az alábbi lemma.

1. Lemma. Ha létezik olyan $[\tau, \tau+T]$ intervallum, hogy a (*) rendszer elérhető $[\tau, \tau+T]$ felett, akkor a (7) elérhetőségének strukturális rangfeltétele fennáll.

Valóban a $\alpha_{\underline{i}} = \delta^t m_{\underline{i}}(a)(\tau)m \quad \beta_j = \delta^t b_j(\tau)$ paraméterekre a (8) mátrix rangja n.

Az együtthatók differenciálalgebrai függetlensége azt jelenti, hogy az együtthatók és eltoltjaik (magasabbrendűek is) nem elégítenek ki polinomiális (differencia)egyenleteket. Az 1. tételben ismertetett együtthatók függetlenségét feltételekzve bebizonyíthatjuk, hogyha a strukturális rang *n*, akkor a (*) rendszer elérhetősége a τ végtelen sok értékére igaz $[\tau, \tau+T]$ felett, amelyik a fő megállapításunk. A megfigyelhetőségre vonatkozó eredmény az elérhetőség és megfigyelhetőség dualitásából következik….

2. Tétel. Ha a $c_1(t),\ldots,$ $c_K(t)$ együtthatók differenciálagebrailag függetlenek, akkor a bilineáris rendszer megfigyelhetősége

$$x(t+1)=\sum_{i-1}^{l} v_i(t)A_i(t)x(t)+B(t)u(t), \qquad (**)$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t),$$

szintén ekvivalens a (9) megfigyelhetőségére vonatkozó strukturális rangfeltétellel.

Valóban. A $v_1(t),\ldots,v_l(t)$ irányításokat lehet úgy választani, hogy a $v_1(t),\ldots,v_l(t),$ $c_1(t),\ldots,c_K(t)$ szekvenciák differenciálalgebrailag függetlenek legyenek.

Referenciák

[1] **Reinschke, K.J.** Multivariable Control- A Graph-theoretic Approach, Berlin, Springer-Verlag, 1988.

[2] **Szigeti F.** A differential algebraic condition for controllability and observability of time dependent linear systems, in Proc. 31st IEEE CDC, 3088-3090, Tucson, AZ.

[3] P. Fuhrmann *On weak and strong reachability and controllability of infinite dimensional systems,* Int. J. Opt. Theory and Applications, 9. 77-87, 1972

[4] **Szigeti F. J. Bokor and A. Edelmayer.** On the reachability subspaces of time varying linear systems, in Proc. ECC'95, 2980-2985.