Legfeljebb két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának Pareto-optimalitása

Ábele-Nagy Kristóf[1,2], Bozóki Sándor[1,2], Rebák Örs

[1]Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

[2]MTA SZTAKI
Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport

GMT Konferencia, 2016

- A döntéshozó szubjektív preferenciáit szeretnénk modellezni
- Több szempont, akár alárendelt szerepben is (szempontfa)
- Példa: tenderek
- Célok: a legjobb alternatíva kiválasztása, rangsorolás
- Ha az alternatívákat minden (levél)szempont szerint értékeljük, akkor a szempontok súlyainak ismeretében meghatározható a rangsor

- A szempontok fontossági súlyait (w_i) szeretnénk meghatározni
- A következő kérdést tesszük fel: „Hányszor fontosabb az i. szempont a j. szempontnál?”
- A válasz $a_{ij} \approx w_i/w_j$
- Mátrixba rendezhető: páros összehasonlítás mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Itt $a_{ij} = w_i/w_j$-vel:

1. $a_{ij} > 0$
2. $a_{ij} = 1/a_{ji}$
3. $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$

$\forall i, j, k = 1, \dots, n.$

A 3. feltétel teljesülésekor a páros összehasonlítás mátrixot konzisztensnek nevezzük, egyébként inkonzisztensnek.

Valódi döntéshozók esetén a konzisztencia ritkán teljesül:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol

1. $a_{ij} > 0$,
2. $a_{ij} = 1/a_{ji}$

$\forall i, j = 1, \dots, n$.
A cél, hogy meghatározzuk a súlyvektort: $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$.

A sajátvektor módszer (EM):

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^{EM} = \lambda \mathbf{w}^{EM},$$

ahol λ az $\mathbf{A}$ domináns (vagy Perron-) sajátértéke, $\mathbf{w}^{EM}$ az ehhez tartozó jobb oldali (Perron-)sajátvektor. A kapott $\mathbf{w}^{EM}$ a $\mathbf{w}$ egy közelítése.

- $\mathbf{w}^{EM}$ skalár szorzótól eltekintve egyértelműen létezik és pozitív (Perron-Frobenius tétel)
- $\lambda \geq n$ és $\lambda = n \Leftrightarrow \mathbf{A}$ konzisztens (Saaty 1977)
- A szokásos normalizálás: $\sum_{i=1}^{n} w_i^{EM} = 1$

Definíció

A $\mathbf{w}$ súlyvektort Pareto-optimálisnak hívjuk, ha nem létezik olyan $\mathbf{w}' = (w_1', w_2', \dots, w_n')^\top$ pozitív súlyvektor, hogy

$$\left| a_{ij} - \frac{w_i'}{w_j'} \right| \leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \qquad \text{minden } 1 \leq i, j \leq n\text{-re},$$

$$\left| a_{k\ell} - \frac{w_k'}{w_\ell'} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \qquad \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n\text{-re}.$$

A hatékonyság elég természetesen elvárható tulajdonság egy súlyvektortól.
A definícióból adódik, hogy konzisztens páros összehasonlítás mátrixokra $\mathbf{w}^{EM}$ Pareto-optimális.

Definíció

Egy elemtől eltekintve konzisztens (simple perturbed) páros összehasonlítás mátrix:

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} 1 & x_1\delta & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1\delta} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ páros összehasonlítás mátrixhoz és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ pozitív súlyvektorhoz tartozó $G(V, \overrightarrow{E})_{\mathbf{A},\mathbf{w}}$ irányított gráf a következő: $V = \{1, \ldots, n\}$ és

$$\overrightarrow{E} = \left\{ arc(i \to j) \mid \frac{w_i}{w_j} \geq a_{ij}, i \neq j \right\}$$

Tétel (Blanquero et al. 2006)

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ súlyvektor pontosan akkor Pareto-optimális, ha $G(V, \overrightarrow{E})_{\mathbf{A},\mathbf{w}}$ erősen összefüggő.

Tétel (Ábele-Nagy, Bozóki 2015)

A sajátvektor módszer által adott $\mathbf{w}^{EM}$ a legfeljebb egy elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén Pareto-optimális.

Definíció

Két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrix:

$$\mathbf{A}_{\delta,\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & x_1\delta & x_2\gamma & x_3 & \dots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1\delta} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \frac{x_3}{x_1} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2\gamma} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \frac{x_3}{x_2} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & \frac{x_2}{x_3} & 1 & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \frac{x_3}{x_{n-1}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

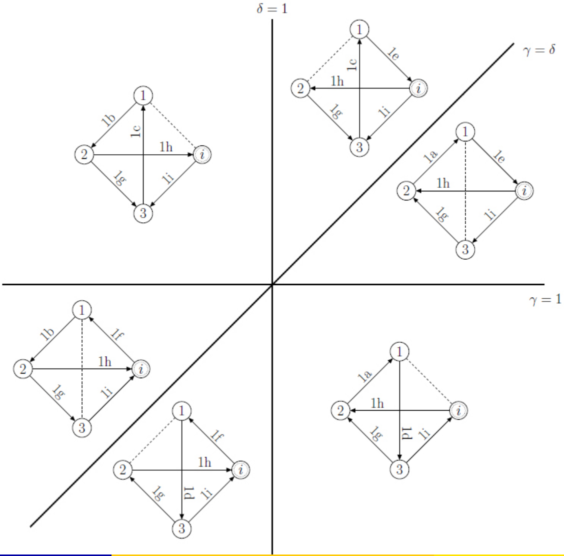
$$\mathbf{A}_{\delta,\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & x_1\delta & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1\delta} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \frac{x_3}{x_1} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \frac{\gamma x_3}{x_2} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & \frac{x_2}{\gamma x_3} & 1 & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \frac{x_3}{x_{n-1}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tétel (Ábele-Nagy, Bozóki, Rebák 2015)

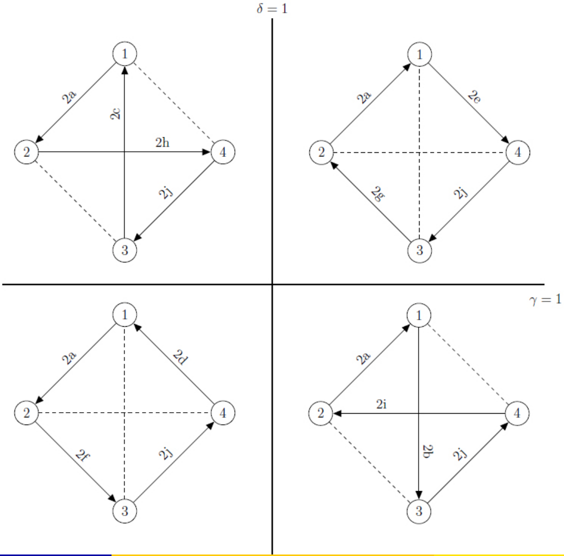
A sajátvektor módszer által adott $\mathbf{w}^{EM}$ a legfeljebb két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén Pareto-optimális.

- $\mathbf{w}^{EM}$ felírható explicit alakban,
- ezzel lehetővé válik w_i/w_j elemzése és
- Blanquero et al. tétele alapján az irányított gráfok felrajzolása.

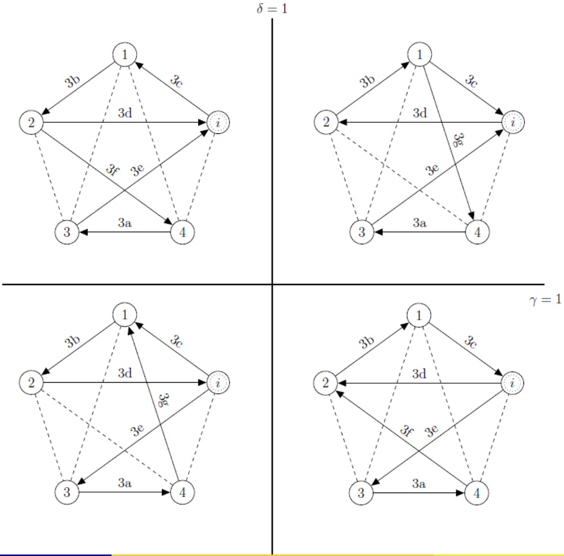
δ, γ egy sorban



δ, γ külön sorban, 4×4



δ, γ külön sorban, $n \times n$, $\quad n \geq 5$



- Legfeljebb két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén a sajátvektor Pareto-optimális
- Legalább 3 elemre viszont már van ellenpélda
- Általában tehát nem Pareto-optimális, ami a módszer hátrányának tekinthető
- Nyitott kérdés: szükséges és elégséges feltétel az általános esetben

Köszönöm a figyelmet!

Ábele-Nagy, K., Bozóki, S.: Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices, *Fundamenta Informaticae*, 144(3-4), 279-289, 2016.

Ábele-Nagy, K., Bozóki, S., and Rebák, Ö.: Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Kézirat*.
http://arxiv.org/pdf/1602.07137v1.pdf