Entrópiaszerű eltérésfüggvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix prioritásvektorának meghatározására

Komáromi Éva

BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

komaromi@uni-corvinus.hu

A kutatást az OTKA 77420-2009 támogatta.

Az előadásom célja, hogy felhívjam a figyelmet

- a döntéselmélet fontos ágára: AHP (Analytic Hierarchy Process) és az OTKA 77420-2009 ebben folyó kutatására;
- az entrópiaszerű eltérésfüggvényekre, alkalmazási lehetőségükre az AHP-ban is;
- a matematikai programozás dualitás elméletére, amely hathatós segítségül szolgál a megoldási módszer megalkotásában is.

A feladat és módszerek

A = {a_{ij}}: nxn méretű pozitív reciprok mátrix: a páros összehasonlítás mátrixa, itt adott.

Olyan p = (p_1, p_2, , p_n) pozitív vektort keresünk – ez a prioritásvektor - , amelyre a B = {p_i/p_j} konzisztens mátrix az A mátrixhoz a „legközelebbi”. A „legközelebbi” szó jelentésétől függ az alkalmazott módszer, különböző módszerek rendszerint különböző p vektorokhoz vezetnek. A legismertebbek módszerek:

- $p = \mathrm{Arg}\,\{Ap = \lambda_{max} p\}$ — λ_{max} az A legnagyobb sajátértéke;
- $p = \mathrm{Arg} \min_{\Sigma p_i = 1, p_i > 0} \{ \sum_i \sum_j (a_{ij} - p_i / p_j)^2 \}$ — a legkisebb négyzetek módszere;
- $p = \mathrm{Arg} \min_{\Sigma p_i = 1, p_i > 0} \sum_i \sum_j (a_{ij} - p_i / p_j)^2 \frac{p_i}{p_j}$ — súlyozott legkisebb négyzetek módszere;
- $p = \mathrm{Arg} \min_{\Sigma p_i = 1, p_i > 0} \sum_i \sum_j (\ln a_{ij} - \ln p_i / p_j)^2$ — logaritmikus legkisebb négyzetek módszere.

Saaty 1980, Gass és Rapcsák 2004, Harker 1987, Temesi 2011, Bozóki, Fülöp és Rónyai 2010, Choo + Wedley 2004

Entrópiaszerű eltérésfüggvények

Csiszár-féle φ -divergencia: $d_\varphi(y,z) = \sum z_i \varphi\left(\frac{y_i}{z_i}\right)$

Bregman-függvények: $d(y,z) = \Psi(z) - \Psi(y) - \Psi'(y)(z-y)$

Kullback-Leibler I-divergencia: $\varphi(p) = p \ln p - p + 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left(y_i \ln\frac{y_i}{z_i} + z_i - y_i\right)$

Négyzetes eltérés: $\Psi(p) = p^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i)^2$

Burg entrópia: $\Psi(p) = -\ln p \rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left(-\ln\frac{z_i}{y_i} + \frac{z_i}{y_i} - 1\right)$

Az {aij} páros összehasonlítás mátrix és a $\{p_i/p_j\}$ mátrix eltérését a p_i és $a_{ij}\,p_j$ értékek Kullback-Leibler I-divergenciáinak összegével mérjük:

$$\sum_i \sum_j \left(p_i \ln\frac{p_i}{a_{ij}p_j} + a_{ij}p_j - p_i \right)$$

Mi a matematikai feladat és miért jó ez a módszer?

A matematikai feladat:

$$C(p) = \sum_i \sum_j \left(p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i \right) \rightarrow \min$$

$$\sum_j p_j = 1,\ p_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

- A minimumpont egyértelmű.
- A minimumpont pozitív és a megoldásvektor formájában kinyilvánított sorrendek és intenzitások nem változnak, ha a vektort megszorozzuk egy pozitív konstanssal.
- B prioritásvektora nem változik.
- Nem kell az alkalmazáshoz a páros összehasonlítás mátrixnak teljesen kitöltöttnek lennie (csak irreducibilisnek: összefüggőnek).
- A megoldásvektor azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az optimális célfüggvény-érték legnagyobb csökkenését az A mátrix a_{ij} elemének és reciprokának változtatásával, a többi elem változatlanul hagyása mellett akkor érjük el, ha ezt az elemet az optimális p_i / p_j értékkel helyettesítjük.

A feladat matematikai tulajdonságai

$$C(p) = \sum_i \sum_j \left(p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i \right) \to \min$$

$$\sum_j p_j = 1,\ p_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

- $C(p) \geq 0$ és $C(p)=0$ akkor és csak akkor, ha $a_{ij} p_j = p_i$ minden i,j indexpárra.
- C(p) szigorúan konvex és differenciálható a

$$P_+ = \left(p : \sum_j p_j = 1, p_j > 0, j = 1,\ldots,n \right)$$ halmazon.

- C(p) felveszi a minimumát a P_+ halmazon, a minimumpont egyértelmű.

A feladat Kuhn-Tucker egyensúlyi feladata, amelyből egy viszonylag egyszerű megoldási módszer adódik, a következő:

$$\text{(KT)} \quad \sum_j p_j = 1, \quad p_j > 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_j \left(\ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) = \omega, \quad i = 1,\ldots,n$$

Megoldási módszer

$$(KT)\quad \sum_j p_j = 1,\quad p_j > 0,\quad j = 1,\dots,n$$

$$\ln\left(p_i^n \bullet \prod_j a_{ji} e^{a_{ji}} \prod_j \frac{1}{p_j} e^{-\frac{p_j}{p_i}} \right) = \sum_j \left(\ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) = \omega = \ln e^{\omega},\quad i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \prod_j a_{ji} e^{a_{ji}} = e^{\omega} \bullet \prod_j p_j \bullet \frac{1}{p_i^n} e^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j p_j = 1,\quad p_i > 0,\quad \frac{1}{p_i^n} e^{\frac{1}{p_i}} = \frac{\prod_j a_{ji} e^{a_{ji}}}{\prod_j a_{j1} e^{a_{j1}}} \bullet \frac{1}{p_1^n} e^{\frac{1}{p_1}},\quad i = 2, \dots, n.$$

Megoldás pl. szukszcesszív helyettesítéssel.

Konklúzió

- Azzal foglalkoztunk, hogy adott páros összehasonlítás mátrixhoz meghatározzuk a Kullback-Leibler I-divergencia szerint legközelebbi konzisztens mátrixot.
- A prioritásvektor meghatározására módszert a konvex programozás egy dualitási tétele alkalmazásával nyertünk.
- A gondolatmenet és módszer alkalmazható nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetén is.
- Jeleztük, hogy más entrópiaszerű eltérésfüggvények is reményteljes jelöltek lehetnek a közelítés vizsgálatára.

Köszönöm a figyelmet!